

机密★启用前

2022 年湖北省七市(州)高三年级 3 月联合统一调研测试

# 数 学

恩施州教育科学研究院 命制

本试卷共 4 页,22 小题,满分 150 分。考试用时 120 分钟。

★祝考试顺利★

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并上交。

一、单选题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $P = \{x|x \geq 1, \text{且 } x \in \mathbf{N}\}$ ,  $Q = \{x|2^x \leq 8\}$ , 则  $P \cap Q =$   
A.  $\{x|1 \leq x < 4\}$       B.  $\{x|1 \leq x < 3\}$       C.  $\{1, 2\}$       D.  $\{1, 2, 3\}$
2. 欧拉公式  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$  ( $e$  为自然对数的底数,  $i$  为虚数单位) 由瑞士数学家 Euler (欧拉) 首先发现. 它将指数函数的定义域扩大到复数, 建立了三角函数和指数函数的关系, 被称为“数学中的天桥”, 则  $e^{i\pi} =$   
A.  $-1$       B.  $1$       C.  $-i$       D.  $i$
3. 抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 上一点  $M(3, y)$  到焦点  $F$  的距离  $|MF| = 4$ , 则抛物线的方程为  
A.  $y^2 = 8x$       B.  $y^2 = 4x$       C.  $y^2 = 2x$       D.  $y^2 = x$
4. 某学校高一年级、高二年级、高三年级的人数分别为 1600, 1100, 800, 现用分层抽样的方法从高一年级、高二年级、高三年级抽取一个学生样本测量学生的身高. 如果在这个样本中, 有高一年级学生 32 人, 且测得高一年级、高二年级、高三年级学生的平均身高分别为 160 cm, 165 cm, 170 cm. 则下列说法正确的是  
A. 高三年级抽取的学生数为 32 人  
B. 高二年级每个学生被抽取到的概率为  $\frac{1}{100}$   
C. 所有年级中, 高一年级每个学生被抽取到的概率最大  
D. 所有学生的平均身高估计要小于 165 cm

5. 函数  $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ , 先把函数  $f(x)$  的图像向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位, 再把图像上各点的横坐标缩短到原来的  $\frac{1}{2}$ , 得到函数  $g(x)$  的图像, 则下列说法错误的是

- A. 函数  $g(x)$  是奇函数, 最大值是 2
- B. 函数  $g(x)$  在区间  $(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$  上单调递增
- C. 函数  $g(x)$  的图像关于直线  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$  对称
- D.  $\pi$  是函数  $g(x)$  的周期

6. 已知  $|\vec{AB}| = 3, |\vec{BC}| = 2, |\vec{AB} - 3\vec{BC}| = 6$ , 则  $|\vec{AB} + \vec{CB}| =$

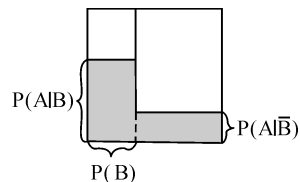
- A. 4
- B.  $\sqrt{10}$
- C. 10
- D. 16

7. 已知  $a = e^{-0.02}, b = 0.01, c = \ln 1.01$ , 则

- A.  $c > a > b$
- B.  $b > a > c$
- C.  $a > b > c$
- D.  $b > c > a$

8. 若将整个样本空间想象成一个  $1 \times 1$  的正方形, 任何事件都对应样本空间的一个子集, 且事件发生的概率对应子集的面积. 则如图所示的涂色部分的面积表示

- A. 事件  $A$  发生的概率
- B. 事件  $B$  发生的概率
- C. 事件  $B$  不发生条件下事件  $A$  发生的概率
- D. 事件  $A, B$  同时发生的概率



二、多项选择: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知函数  $f(x) = |x| + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x$ , 则下列说法正确的是

- A.  $f(x)$  是偶函数
- B.  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减
- C.  $f(x)$  是周期函数
- D.  $f(x) \geq -1$  恒成立

10. 尽管目前人类还无法准确预报地震, 但科学家经过研究, 已经对地震有所了解, 例如, 地震时释放的能量  $E$  (单位: 焦耳) 与地震里氏震级  $M$  之间的关系为  $\lg E = 4.8 + 1.5M$ , 则下列说法正确的是

- A. 地震释放的能量为  $10^{15.3}$  焦耳时, 地震里氏震级约为七级
- B. 八级地震释放的能量约为七级地震释放的能量的 6.3 倍
- C. 八级地震释放的能量约为六级地震释放的能量的 1000 倍
- D. 记地震里氏震级为  $n (n = 1, 2, \dots, 9, 10)$ , 地震释放的能量为  $a_n$ , 则数列  $\{a_n\}$  是等比数列

11. 已知直线  $l: kx - y - k + 1 = 0$ , 圆  $C$  的方程为  $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 16$ , 则下列选项正确的是
- A. 直线  $l$  与圆一定相交
- B. 当  $k = 0$  时, 直线  $l$  与圆  $C$  交于两点  $M, N$ , 点  $E$  是圆  $C$  上的动点, 则  $\triangle MNE$  面积的最大值为  $3\sqrt{7}$
- C. 当  $l$  与圆有两个交点  $M, N$  时,  $|MN|$  的最小值为  $2\sqrt{6}$
- D. 若圆  $C$  与坐标轴分别交于  $A, B, C, D$  四个点, 则四边形  $ABCD$  的面积为 48
12. 已知三棱锥  $S - ABC$  的底面是边长为  $a$  的正三角形,  $SA \perp$  平面  $ABC$ ,  $P$  为平面  $ABC$  内部一动点 (包括边界). 若  $SA = \frac{a}{2}$ ,  $SP$  与侧面  $SAB$ , 侧面  $SAC$ , 侧面  $SBC$  所成的角分别为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , 点  $P$  到  $AB, AC, BC$  的距离分别为  $d_1, d_2, d_3$ , 那么
- A.  $\sqrt{d_1} + \sqrt{d_2} + \sqrt{d_3}$  为定值
- B.  $d_1 + d_2 + d_3$  为定值
- C. 若  $\sin\alpha_1, \sin\alpha_3, \sin\alpha_2$  成等差数列, 则  $d_1 + d_2$  为定值
- D. 若  $\sin\alpha_1, \sin\alpha_3, \sin\alpha_2$  成等比数列, 则  $\sqrt{d_1} + \sqrt{d_2}$  为定值

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若  $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{1}{3}$ , 则  $\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta + \cos\theta} =$  \_\_\_\_\_.
14. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右焦点  $F$  关于它的一条渐近线的对称点在另一条渐近线上, 则双曲线  $C$  的离心率为 \_\_\_\_\_.
15. 已知函数  $f(x) = x + \frac{1}{x} (x > 0)$ , 若  $\frac{f(x)}{(f(x))^2 + a}$  的最大值为  $\frac{2}{5}$ , 则正实数  $a =$  \_\_\_\_\_.
16. 若函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 对任意的  $x_1, x_2$ , 当  $x_1 - x_2 \in D$  时, 都有  $f(x_1) - f(x_2) \in D$ , 则称函数  $f(x)$  是关于  $D$  关联的. 已知函数  $f(x)$  是关于  $\{4\}$  关联的, 且当  $x \in [-4, 0)$  时,  $f(x) = x^2 + 6x$ . 则: ① 当  $x \in [0, 4)$  时, 函数  $f(x)$  的值域为 \_\_\_\_\_; ② 不等式  $0 < f(x) < 3$  的解集为 \_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且满足  $a_n = 3S_n - 2 (n \in \mathbf{N}^*)$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 求证: 对任意的  $m \in \mathbf{N}^*$ ,  $S_m, S_{m+2}, S_{m+1}$  成等差数列.

18. (12 分)

在  $\triangle ABC$  中,  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且满足  $a \cos C - b - \frac{c}{2} = 0$ .

(1) 求  $A$ ;

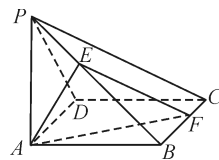
(2) 若  $a = \sqrt{3}$ , 求  $b + 2c$  的取值范围.

19. (12分)

如图所示,在四棱锥  $P-ABCD$  中,底面  $ABCD$  为正方形,  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ,  $PA = AB$ ,  $E, F$  分别为线段  $PB, BC$  上的动点.

(1) 若  $E$  为线段  $PB$  的中点,证明:平面  $AEF \perp$  平面  $PBC$ ;

(2) 若  $BE = \sqrt{2}BF$ ,且平面  $AEF$  与平面  $PBC$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{7}}{14}$ ,试确定点  $F$  的位置.



20. (12分)

微信小程序“党史知识竞赛”中的“答题竞赛”板块有个“双人竞赛”栏目,可满足两人通过回答多个问题的形式进行竞赛.甲,乙两单位在联合开展党史学习教育特色实践活动中通过此栏目进行比赛,比赛规则是:每一轮比赛中每个单位派出一人代表其所在单位答题,两单位都全部答对或者都没有全部答对则均记0分;一单位全部答对而另一单位没有全部答对,则全部答对的单位记1分,没有全部答对的单位记-1分.设每轮比赛中甲单位全部答对的概率为  $\frac{4}{5}$ ,乙单位全部答对的概率为  $\frac{2}{3}$ ,甲,乙两单位答题相互独立,且每轮比赛互不影响.

(1) 经过1轮比赛,设甲单位的记分为  $X$ ,求  $X$  的分布列和期望;

(2) 若比赛采取3轮制,试计算第3轮比赛后甲单位累计得分低于乙单位累计得分的概率.

21. (12分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  经过点  $A(0, 1)$ ,且右焦点为  $F(1, 0)$ .

(1) 求  $C$  的标准方程;

(2) 过点  $(0, \frac{1}{2})$  的直线  $l$  与椭圆  $C$  交于两个不同的点  $P, Q$ ,直线  $AP$  与  $x$  轴交于点  $M$ ,直线  $AQ$  与  $x$  轴交于点  $N$ .证明:以  $MN$  为直径的圆过  $y$  轴上的定点.

22. (12分)

已知函数  $f(x) = \ln x + \frac{2}{x} - 2, g(x) = x \ln x - ax^2 - x + 1$ .

(1) 证明:函数  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  内有且仅有一个零点;

(2) 假设存在常数  $\lambda > 1$ ,且满足  $f(\lambda) = 0$ ,试讨论函数  $g(x)$  的零点个数.